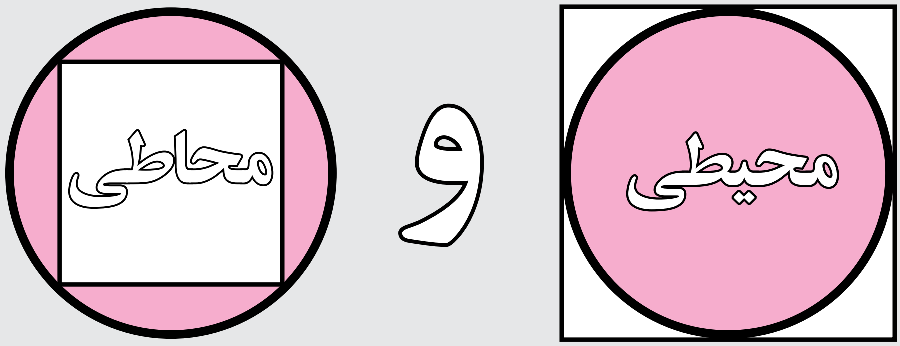
هوشنگ شرقی

دربارهٔ چهارضلعی‌های



بیشتر بدانیم

اشاره

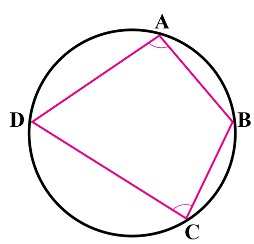
دربارهٔ چهارضلعی‌های محیطی و محاطی در بحث دایره‌ها و در کتاب هندسهٔ ۲ بحث شده است. اما قضایا و بحث‌های تکمیلی آن‌ها که می‌توانند به درک بهتر دانش‌آموزان از این موضوع منجر شوند، آن‌چنان که بایسته است مورد توجه قرار نگرفته‌اند. در اینجا می‌خواهیم به کنکاشی عمیق‌تر در این زمینه بپردازیم.

چهارضلعی‌های محاطی

چنانچه می‌دانید، چهارضلعی ABCD را محاطی گوییم، هرگاه از رئوس آن دایره‌ای بگذرد. از کتاب درسی نیز می‌دانیم که یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر، مجموع دو زاویهٔ داخلی روبه‌روی آن ۱۸۰° باشد:

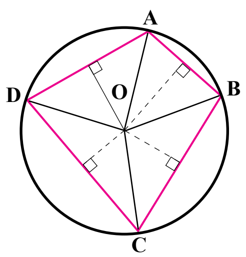
ABCD محاطی است $\Leftrightarrow \hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ (یا $\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$)

در مورد این چهارضلعی قضایای تکمیلی زیر برقرار هستند.

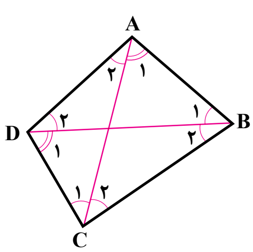


۱. در هر چهارضلعی محاطی، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه همرس‌اند. نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی است.

OA=OB=OC=OD=R

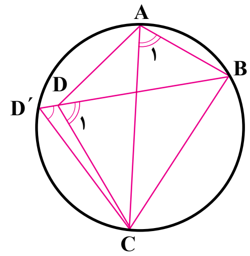


۲. هرگاه در یک چهار ضلعی، دو زاویهٔ روبه‌رو به یک ضلع با هم برابر باشند، چهار ضلعی، محاطی است و برعکس. یعنی در شکل زیر، اگر $\hat{A}_1=\hat{D}_1$ (و یا $\hat{B}_2=\hat{A}_2$ و یا $\hat{B}_1=\hat{C}_1$ یا $\hat{D}_2=\hat{C}_2$) در این صورت ABCD محاطی است و از A و B و C و D دایره‌ای می‌گذرد و بر عکس؛ یعنی اگر ABCD محاطی باشد، آن‌گاه $\hat{A}_1=\hat{D}_1$ (و $\hat{B}_2=\hat{A}_2$ و...). اثبات قضیهٔ عکس، با توجه به زوایای محاطی روبه‌رو به یک کمان، ساده است، اما برای اثبات قضیهٔ اصلی، از برهان خلف استفاده می‌کنیم.



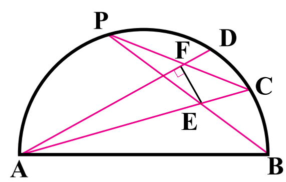
فرض کنیم در شــکل داریم: $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$. می‌خواهیم نشان دهیم از A، B، C و D یـک دایـره می‌گذرد. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. (چگونه؟) اگر این دایره از D بگذرد که حکم ثابت شده اســت. اما اگر نگذرد، نقطهٔ D درون، یا بیرون این دایره واقع می‌شود. اگر D درون دایره باشد، مطابق شکل، امتداد BD دایره را در D' قطع می‌کند. D' را به C وصل می‌کنیم. حال با توجه به شکل داریم:

$$\hat{D}' = \hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \text{ و (فرض) } \hat{D}_1 = \hat{A}_1 \Rightarrow \hat{D}' = \hat{D}_1$$

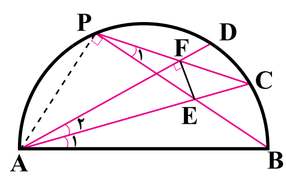


ولی مطابق شکل داریم: $\hat{D}_1 > \hat{D}'$ (چرا؟) و این تناقض است. در حالتی هم که نقطهٔ D بیرون دایره بیفتد، نشان دهید به تناقضی مشابه می‌رسیم. پس فرض خلف باطل است و باید ABCD محاطی باشد. به نمونه‌هایی از کاربردهای این قضیه توجه کنید.

● **مثال۱.** در شــکل زیر AB قطر نیم‌دایره و C وسط کمان BD است. اگر P نقطه‌ای دلخواه بر محیط نیم‌دایره باشد، اندازهٔ زاویه AFE را به دست آورید.

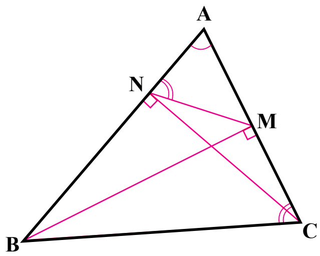


حل: طبق فرض: $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$ و در نتیجه:



$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. (چـرا؟) همچنین $\hat{P}_1$ و $\hat{A}$ زوایای محاطی روبه‌رو به یک کمان و در نتیجه مساوی‌اند، پس $\hat{P}_1 = \hat{A}_1 = \hat{A}_2$. ولی $\hat{P}_1$ و $\hat{A}_2$ هر دو روبه‌رو به EF هستند، پس طبق قضیهٔ گفته شده، چهارضلعی PFEA محاطی اســت. در نتیجه: $A\hat{P}E = A\hat{F}E$. (چرا؟) ولی زاویهٔ APE (یا $A\hat{P}B$) در نیم‌دایره، محاطی روبه‌رو به قطر و در نتیجه قائمه است. پس: $A\hat{F}E = 90^\circ$.

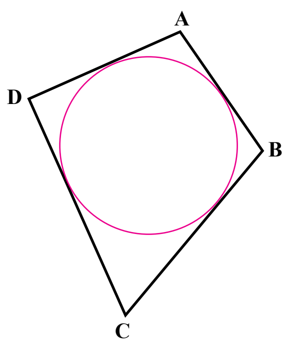
● **مثال۲.** در مثلث ABC، ارتفاع‌های BM و CN را رســم کرده‌ایم. نشان دهید: $\Delta AMN \sim \Delta ABC$



حل: چون زوایای قائمهٔ M و N هر دو روبه‌رو به BC هستند، پس MNBC محاطی است و زوایای MNB و C مکمل هم هستند. چون $M\hat{N}B$ و $M\hat{N}A$ نیز مکمل هم هســتند، پس: $\hat{C} = M\hat{N}A$ و چون زاویهٔ A در دو مثلث AMN و ABC مشــترک است، لذا دو مثلث دو زاویهٔ برابر دارند و متشابهند.

چهارضلعی‌های محیطی

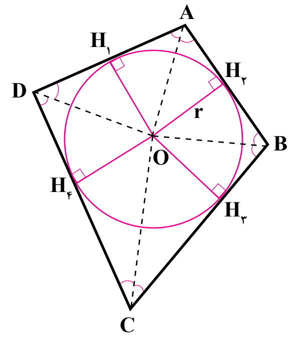
چنانچــه می‌دانیم، یــک چهارضلعی را محیطــی گوییم، هرگاه مانند شــکل زیر، اضلاع آن بر دایره‌ای مماس باشند و در این صورت، دایرهٔ مزبور را دایرهٔ محاطی می‌گوییم. از کتاب درســی می‌دانیم، یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر مجموع اضلاع روبه‌روی آن با هم مساوی باشند؛ یعنی ABCD⇔AB+CD=AD+BC محیطی.



اما قضیهٔ دیگری هم در مورد این چهار ضلعی‌ها وجود دارد که به آن اشاره می‌کنیم:

«در هــر چهارضلعــی محیطــی نیم‌ســازهای زوایــای داخلی چهارضلعی در یک نقطــه همرس‌اند و این نقطه، همان مرکز دایرهٔ محاطی است.»

$OH_1=OH_2=OH_3=OH_4=r$



عکس قضیهٔ فوق نیز برقرار است؛ یعنی:

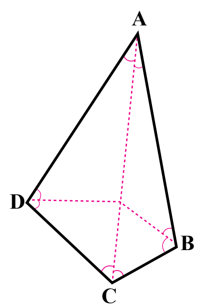
«هر چهارضلعی که در آن نیم‌سازهای زوایای داخلی در یک نقطه همرس باشند، یک چهارضلعی محیطی است و نقطهٔ همرسی نیم‌سازها، مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی است.»

درستی این قضیه و قضیهٔ عکس را به‌عنوان تمرین اثبات کنید.

● **مثال**. در چهارضلعی ABCD، نیم‌سازهای زوایای داخلی در یک نقطه همرس‌اند. اگر AC و BD اقطار چهارضلعی باشند و AD=۲CD و AB=۳BC، CD چند برابر BC است؟

حل: چون نیم‌سازهای زوایای داخلی در یک نقطه همرس‌اند، پس چهارضلعی محیطی است و در نتیجه:

AD+BC=AB+CD

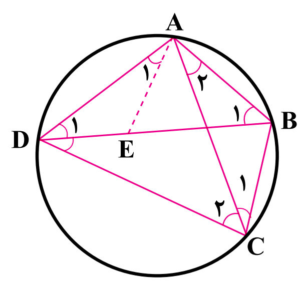


به کمک مفروضات مسئله داریم:

۲CD+BC=۳BC+CD⇒CD=۲BC

تمرین

۱. در شکل زیر ABCD چهارضلعی محاطی است و زاویهٔ DAE مساوی زاویهٔ CAB جدا شده است.



الف) نشان دهید:

ΔADE~ΔABC

و از آنجا نسبت تشابه را بنویسید و نتیجه بگیرید:

AD.BC=AC.DE (۱)

ب) نشان دهید:

ΔABE~ΔACD

و از آنجا نسبت تشابه را بنویسید و نتیجه بگیرید:

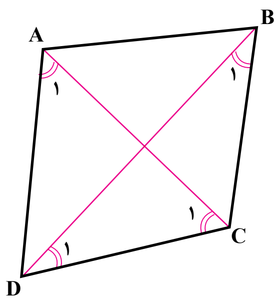
AB.CD=AC.BE (۲)

ج) از جمع کردن طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) ثابت کنید:

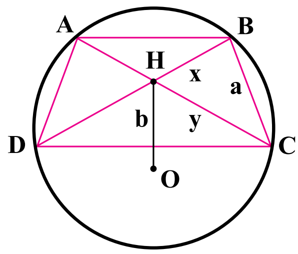
AD.BC+AB.CD=AC.BD (قضیهٔ بطلمیوس)

۲. به کمک قضیهٔ بطلمیوس مسائل زیر را حل کنید:

الف) در شکل زیر داریم: $\hat{A}_1=\hat{B}_1=\hat{C}_1=\hat{D}_1$ ، AB=۵ و BD=AC=BC+۲. طول‌های اضلاع و اقطار چهارضلعی را به‌دست آورید.



ب) در شکل زیر ABCD ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محاط در دایرهٔ واحد است. فرض کنید y>x، در این صورت y-x برابر است با:



الف) $(ab)^2$ ب) $a\sqrt{b}$ ج) ab

د) $b\sqrt{a}$ هـ) $\sqrt{ab}$

(مرحلهٔ اول پانزدهمین المپیاد ریاضی ایران)

راهنمایی: نشان دهید HBCO محاطی است.

۳. ثابت کنید در هر چهارضلعی محیطی با محیط ۲P و مساحت S، شعاع دایرهٔ محاطی از دستور $r=\frac{S}{P}$ به‌دست آید.